

# MATEMATIKA

## I. RÉSZLETES ÉRETTSÉGI VIZSGAKÖVETELMÉNY

Az érettségi követelményeit két szinten határozzuk meg:

- *középszinten* a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;
- az *emelt szint* tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Ezen túlmenően az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatóak, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

### A) KOMPETENCIÁK

*Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok*

- A vizsgázó legyen képes adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.
- Legyen képes kijelentéseket szabatosan megfogalmazni, azokat összekapcsolni, kijelentések igazságtartalmát megállapítani.
- Lássza az eltéréseket, illetve a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi nyelv között.
- A matematika minden területén és más tantárgyakban is tudja alkalmazni a halmaz fogalmát, illetve a halmazműveleteket.
- Legyen jártas alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában, és legyen képes ennek segítségével gyakorlati sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldására.
- Ismerje a gráfok jelentőségét, sokoldalú felhasználhatóságuk néhány területét, és legyen képes további felhasználási lehetőségek felismerésére a gyakorlati életben és más tudományágakban.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje a halmazelmélet alapvető szerepét a mai matematika felépítésében.

*Számelmélet, algebra*

- A vizsgázó legyen képes betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a „betűk mögött”.
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit (pl. algebrai, grafikus, közelítő).
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket.
- Tudja az eredményeket előre megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e.
- Az *emelt szinten* érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is.

*Függvények, az analízis elemei*

- A vizsgázó legyen képes a körülötte levő világ egyszerűbb összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek elemzéséből tudjon következtetni valóságos jelenségek várható lefolyására.
- Legyen képes a változó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Értse, hogy a függvény matematikai fogalom, két halmaz elemeinek egymáshoz rendelése. Ismerje fel a hozzárendelés formáját, tudja elemezni a halmazok közötti kapcsolatokat.
- Lássza, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Ismerje a számtani és mértani sorozatot.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje az analízis néhány alapelemét, amelyekre más szaktudományokban is (pl. fizika) szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni, szélsőértéket, görbe alatti területet számolni.

### *Geometria, koordináta geometria, trigonometria*

- A vizsgázó tudjon síkban, illetve térben tájékozódni, térbeli viszonyokat elképzelni, tudja a háromdimenziós valóságot - alkalmas síkmetszetekkel - két dimenzióban vizsgálni.
- Vegye észre a szimmetriákat és az arányokat, tudja ezek egyszerűsítő hatásait problémák megfogalmazásában, bizonyításokban, számításokban kihasználni.
- Tudjon a feladatok megoldásához megfelelő ábrát készíteni.
- Tudjon hosszúságot, területet, felszínt, térfogatot mérni és számolni, legyen tisztában a mérési pontosság fogalmával.
- Ismerje a geometria szerepét a műszaki életben és bizonyos képzőművészeti alkotásokban.
- *Az emelt szinten* érettségiző diák tudja szabatosan megfogalmazni a geometriai bizonyítások gondolatmenetét.

### *Valószínűség-számítás, statisztika*

- A vizsgázó értse a statisztikai kijelentések és gondolatmenetek sajátos természetét.
- Ismerje a statisztikai állítások igazolására felhasználható adatok gyűjtésének lehetséges formáit, és legyen jártas a kapott adatok áttekinthető szemléltetésében, különböző statisztikai mutatókkal való jellemzésében.
- *Az emelt szinten* érettségiző diák tudjon egyszerűbb véletlenszerű jelenségeket modellezni és a valószínűségi modellben számításokat végezni.
- *Az emelt szinten* érettségiző diák ismerje a véletlen szerepét egyszerű statisztikai mintavételi eljárásokban.

## B) VIZSGAKÖVETELMÉNYEK

### 1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

E témakört (különösen a gondolkodási módszereket, a halmazokat és a matematikai logikát) elsősorban nem önállóan számon kérhető ismeretanyagként kell elképzelni, hanem olyan szemléletformáló, a matematikaoktatás egészét átszövő módszerek, illetve eszközök összességéként, amely szinte teljes egészében megjelenik minden további témakörben is.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p><b>1.1 Halmazok</b></p> <p>1.1.1 Halmazműveletek</p> <p>1.1.2 Számosság, részhalmazok</p>	<p>Ismerje és használja a halmazok megadásának különböző módjait, a halmaz elemének fogalmát.</p> <p>Definiálja és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő fogalmakat: halmazok egyenlősége, részhalmaz, üres halmaz, véges és végtelen halmaz, komplementer halmaz.</p> <p>Ismerje és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő műveleteket: unió, metszet, különbség.</p> <p>Tudjon koordináta-rendszerben ábrázolni egyszerűbb ponthalmazokat.</p> <p>Tudja meghatározni véges halmazok elemeinek a számát.</p>	<p>Ismerje és alkalmazza a de Morgan azonosságokat.</p> <p>Tudja alkalmazni a logikai szita módszerét egyszerűbb esetekben.</p> <p>Ismerjen példát véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen halmazra.</p> <p>Ismerje a megszámlálhatóan végtelen halmaz definícióját.</p> <p>Bizonyítsa egyszerűbb esetekben, hogy egy halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen.</p>
<p><b>1.2 Matematikai logika</b></p> <p>1.2.1 Fogalmak, tételek és bizonyítások a matematikában</p>	<p>Tudjon egyszerű matematikai szövegeket értelmezni.</p> <p>Értse, és egyszerű feladatokban alkalmazza a tagadás műveletet.</p> <p>Ismerje az „és”, a „(megengedő) vagy” logikai jelentését, tudja használni és összekapcsolni azokat a halmazműveletekkel.</p> <p>Tudja a „ha...akkor...” és az „akkor és csak akkor” típusú állítások igazságértékét megállapítani.</p> <p>Használja helyesen a „minden” és a „van olyan” kifejezéseket.</p> <p>Tudjon definíciókat, tételeket pontosan megfogalmazni.</p> <p>Használja és alkalmazza feladatokban helyesen a szükséges, az elégséges és a szükséges és elégséges feltétel fogalmát.</p> <p>Képes legyen egy egyszerű állításról eldönteni, hogy igaz vagy hamis.</p>	<p>Ismerje az alábbi bizonyítási típusokat és tudjon példát mondani alkalmazásukra: direkt és indirekt bizonyítás, skatulyaelv, teljes indukció.</p> <p>Tudja megfogalmazni konkrét esetekben tételek megfordítását.</p>

<b>1.3 Kombinatorika</b>	Tudjon egyszerű sorbarendezési, kiválasztási és egyéb kombinatorikai feladatokat megoldani. Tudja a kedvező esetek számát meghatározni a komplementer esetek segítségével is. Tudja kiszámolni a binomiális együtthatókat.	Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) kiszámítására vonatkozó képleteket. Ismerje és alkalmazza a binomiális tételt. Ismerje a Pascal-háromszöget és alapvető tulajdonságait.
<b>1.4 Gráfok</b>	Tudjon konkrét szituációkat szemléltetni, és egyszerű feladatokat megoldani gráfok segítségével. Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: pont, él, fokszám, teljes gráf. Ismerje a gráf pontjainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggést.	Definiálja a következő fogalmakat: többszörös él, hurokél, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, fa. Ismerje a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést.

## 2. Számelmélet, algebra

Az algebra tanításának egyik fő célja annak felfedeztetése és megértetése, hogy egymástól távol állónak tűnő problémák ugyanazon matematikai, algebrai struktúrával rendelkeznek, ezért megoldásuk során hasonló eljárásokat, gondolatmeneteket alkalmazhatunk, s leírásuk formálisan azonos módon történik. (Például különböző témakörökből vett másodfokú egyenletre vezető feladatok.)  
Fontos a számolás során megismert műveleti szabályok absztrahálása, a jártasság megszerzése a betűkifejezésekkel végzett műveletekben. Meg kell mutatni a számfogalom bővítésének szükségességét és folyamatát. Emelt szinten el kell juttatni a tanulókat a permanencia-elv fontosságának felismeréséhez.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>2.1 Alapműveletek</b>	Tudjon alapműveleteket biztonságosan elvégezni (zsebszámológéppel is). Ismerje és használja feladatokban az alapműveletek műveleti azonosságait (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás).	
<b>2.2 A természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek</b>	Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatósági alapfogalmakat (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám). Tudjon természetes számokat prímtényezőkre bontani, tudja adott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét kiszámítani; tudja mindezeket egyszerű szöveges (gyakorlati) feladatok megoldásában alkalmazni. Definiálja és alkalmazza feladatokban a relatív prímszámokat.	Tudja megfogalmazni a számelmélet alaptételét. Bizonyítsa, hogy végtelen sok prímszám van.
2.2.1 Oszthatóság	Ismerje a 10 hatványaira, illetve a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat, tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.	Tudjon összetett oszthatósági feladatokat megoldani. Tudja meghatározni természetes számok pozitív osztóinak számát.

2.2.2 Számrendszerek	Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből 2-es alapú számrendszerbe és viszont. Ismerje a helyiértékes írásmódot.	Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből $n$ alapú ( $n \leq 9$ ) számrendszerbe és viszont. Tudjon $n$ alapú ( $n \leq 9$ ) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni.
<b>2.3 Racionális és irracionális számok</b>	Tudja definiálni a racionális és irracionális számokat, és ismerje ezek kapcsolatát a tizedestörtekkel.	Adott $n$ ( $n \in \mathbf{N}$ ) esetén tudja eldönteni, hogy $\sqrt{n}$ irracionális szám-e. Bizonyítsa, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám. Tudja meghatározni tizedestört alakban megadott racionális szám közöséges tört alakját.
<b>2.4 Valós számok</b>	Ismerje a valós számkör felépítését ( $\mathbf{N}$ , $\mathbf{Z}$ , $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{Q}^*$ , $\mathbf{R}$ ), valamint a valós számok és a számegyenes kapcsolatát. Tudjon ábrázolni számokat a számegyenesen. Ismerje és használja a nyílt és zárt intervallum fogalmát és jelölését. Ismerje az abszolútérték definícióját. Ismerje adott szám normálalakjának felírási módját, tudjon számolni a normálalakkal. Tudjon adott helyiértékre vonatkozóan helyesen kerekíteni.	Tudja, hogy mit értünk adott műveletekre zárt számhalmazokon.
<b>2.5 Hatvány, gyök, logaritmus</b>	Tudja értelmezni a hatványozást racionális kitevő esetén.  Ismerje és használja a hatványozás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait. Definiálja és használja az $n$ $a$ fogalmát.  Definiálja és használja feladatok megoldásában a logaritmus fogalmát, valamint a logaritmus azonosságait. Tudjon áttérni más alapú logaritmusra.	Ismerje a permanencia elvet. Tudja szemléletesen értelmezni az irracionális kitevőjű hatványt. Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevő esetén. Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a gyökvonás azonosságait.  Bizonyítsa a szorzat, a hányados és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságokat. Bizonyítsa a más alapú logaritmusra való áttérés szabályát.
<b>2.6 Betűkifejezések</b>  2.6.1 Nevezetes azonosságok	Tudja alkalmazni feladatokban a következő kifejezések kifejtését, illetve szorzattá alakítását: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ . Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni (összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása).	Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját.  Tudja alkalmazni feladatokban az $a^n - b^n$ , illetve az $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ kifejezés szorzattá alakítását.
<b>2.7 Arányosság</b>  2.7.1 Százalékszámítás	Tudja az egyenes és a fordított arányosság definícióját és grafikus ábrázolásukat. Ismerje és tudja feladatokban alkalmazni az arányosság fogalmát.  Ismerje és tudja feladatokban alkalmazni a százalék fogalmát.	

<p><b>2.8 Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek</b></p> <p>2.8.1 Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Magasabb fokú egyenletek</p> <p>Négyzetgyökös egyenletek</p> <p>2.8.2 Nem algebrai egyenletek</p> <p>Abszolútértékes egyenletek</p>	<p>Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése, értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálata. Tudja meghatározni szöveges feladatban szereplő változók értelmezési tartományát és a feladat eredményét összevetni a feladat szövegével.</p> <p>Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szöveges feladatok megoldásában.</p> <p>Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket és elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszereket megoldani.</p> <p>Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját. Ismerje a másodfokú egyenlet diszkriminánsának fogalmát, és a diszkrimináns előjele és a (valós) megoldások száma közötti összefüggést. Ismerje és alkalmazza a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét. Alkalmazza feladatokban a gyöktényező alakot. Tudjon törtes egyenleteket, másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. Tudjon egyszerű másodfokú egyenletrendszereket megoldani.</p> <p>Tudjon egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenleteket megoldani.</p> <p>Tudjon <math>\sqrt{ax + b} = cx + d</math> típusú egyenleteket megoldani.</p> <p>Tudjon <math> ax + b  = cx + d</math> típusú egyenleteket megoldani.</p>	<p>Tudjon paraméteres elsőfokú egyenleteket megoldani. Tudjon elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszereket megoldani.</p> <p>Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét.</p> <p>Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket. Tudjon másodfokú paraméteres egyenleteket megoldani.</p> <p>Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani.</p> <p>Tudjon értelmezési tartomány, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatokat megoldani.</p> <p>Tudjon két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.</p> <p>Tudjon összetett abszolútértékes egyenleteket algebrai úton megoldani.</p>
--	--	---

Exponenciális és logaritmusos egyenletek	Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani.	Tudjon összetett egyenleteket, egyenletrendszereket megoldani.
Trigonometrikus egyenletek	Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani.	Tudjon másodfokúra visszavezethető és a 4.5 pontban szereplő azonosságok alkalmazásával megoldható egyenleteket megoldani.
2.8.3 Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek	Tudjon egyszerű első- és másodfokú, valamint törtes egyenlőtlenségeket és egyszerű egyenlőtlenség-rendszereket megoldani.	Tudjon összetett egyenlőtlenségeket és egyenlőtlenség-rendszereket megoldani. Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlőtlenségeket megoldani.
<b>2.9 Középértékek, egyenlőtlenségek</b>	Ismerje két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalmát, kapcsolatát, használatát.	Ismerje $n$ szám számított középértékeit (számtani, mértani, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket. Bizonyítsa, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ . Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

### 3. Függvények, az analízis elemei

A témakör (hasonlóan a geometria, illetve a valószínűség-számítás, statisztika fejezetekhez) különösen alkalmas annak szemléltetésére, hogy egy probléma matematikai megoldása három lépésben történik: a matematikai modell megalkotása, a matematikai feladat megoldása a modellen belül, és az eredmény értelmezése. Fontos terület a függvényábrázolás alkalmazása egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>3.1 A függvény</b>	Ismerje a függvény matematikai fogalmát és a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet). Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni. Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve tudja egyszerű függvények esetén $f(x) = c$ alapján az $x$ -et meghatározni. Ismerje a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál. Ismerje az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezését (pl. az exponenciális és a logaritmus függvény vagy a geometriai transzformációk esetében).	Ismerje a függvénytani alapfogalmak pontos definícióját. Ismerje és alkalmazza a függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának a fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének fogalmát.  Ismerje és alkalmazza az inverzfüggvény fogalmát.  Ismerje az összetett függvény fogalmát, képzésének módját.

<b>3.2 Egyváltozós valós függvények</b>	<p>Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket:</p> $x \mapsto ax + b, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto ax^2 + bx + c, x \mapsto \sqrt{x},$ $x \mapsto  x , x \mapsto \frac{a}{x}$ $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \operatorname{tg} x,$ $x \mapsto a^x, x \mapsto \log_a x.$	<p>Ismerje és tudja ábrázolni az <math>x \mapsto x^n</math> (<math>n \in \mathbb{N}^+</math>) függvényt.</p> <p>Tudjon a közép szinten felsorolt függvényekből összetett függvényeket képezni.</p>
<p>3.2.1 A függvények grafikonja, függvénytranszformációk</p> <p>3.2.2 A függvények jellemzése</p>	<p>Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról.</p> <p>Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni:  <math>f(x) + c, f(x+c), cf(x)</math>.</p> <p>Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján) értékészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.</p>	<p>Tudja ábrázolni az alapvető függvények (3.2) transzformáltjainak grafikonját (<math>c \cdot f(ax + b) + d</math>).</p> <p>Tudja jellemezni a függvényeket korlátosság szempontjából. Tudja meghatározni a függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében, transzformációk segítségével. Használja a konvexitás és konkavitás fogalmát a függvények jellemzésére. Tudjon másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatokat megoldani.</p>
<b>3.3 Sorozatok</b> <p>3.3.1 Számítási és mértani sorozatok</p> <p>3.3.2 Végtelen mértani sor</p> <p>3.3.3 Kamatos kamat, járadékszámítás</p>	<p>Ismerje a számsorozat fogalmát és használja a különböző megadási módjait (utasítás, képlet, rekurzív definíció).</p> <p>Tudjon olyan feladatokat megoldani a számtani és mértani sorozatok témaköréből, ahol a számtani, illetve mértani sorozat fogalmát és az <math>a_n</math>-re, illetve az <math>S_n</math>-re vonatkozó összefüggéseket kell használni.</p> <p>Tudja a kamatos kamat számítására vonatkozó képletet használni, s abból bármelyik ismeretlen adatot kiszámolni.</p>	<p>Tudjon sorozatot jellemezni (korlátosság, monotonitás). Ismerje a konvergencia szemléletes fogalmát. Ismerje és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergencia sorozat definícióját. Alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergencia sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket.</p> <p>Bizonyítsa a számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggéseket, valamint az összegképleteket.</p> <p>Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.</p> <p>Tudjon gyűjtőjárdékot és törlesztőrészt számolni.</p>



<p><b>3.4. Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei</b></p> <p>3.4.1 Határérték, folytonosság</p> <p>3.4.2 Differenciálszámítás</p> <p>3.4.3 Integrálszámítás</p>		<p>Ismerje a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát. Ismerje a folytonosság szemléletes fogalmát.</p> <p>Tudja a differencia- és differenciálhányados definícióját. Alkalmazza az összeg-, a különbség-, a konstansszoros, a szorzat- és a hányadosfüggvény deriválási szabályait. Alkalmazza egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályát.</p> <p>Tudja bizonyítani, hogy <math>(x^n)' = nx^{n-1}</math> (<math>n \in \mathbb{N}</math> esetén). Ismerje a trigonometrikus függvények deriváltját.</p> <p>Alkalmazza a differenciálszámítást érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására és polinomfüggvények vizsgálatára (monotonitás, szélsőérték, konvexitás).</p> <p>Ismerje folytonos függvényekre a határozott integrál szemléletes fogalmát és tulajdonságait.</p> <p>Ismerje a kétoldali közelítés módszerét, az integrálfüggvény fogalmát, a primitív függvény fogalmát, valamint a Newton-Leibniz-tételt.</p> <p>Tudja polinomfüggvények, illetve a szinusz és koszinusz függvény grafikonja alatti területet kiszámolni.</p>
--	--	---

#### 4. Geometria, koordináta geometria, trigonometria

A témakör követelményeit abban a tudatban kell megfogalmaznunk, hogy a geometria szerepe, funkciója, hangsúlyai sokat változtak az elmúlt évtizedekben. Ennek következtében a szintetikus geometria egyes területeken háttérbe szorult. Szem előtt kell tartani ugyanakkor, hogy a geometria oktatása segíti a pontos fogalomalkotást, a struktúraalkotás képességét, és fejleszti a térszemléletet.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p><b>4.1 Elemi geometria</b></p> <p>4.1.1 Térelemek</p> <p>4.1.2 A távolságfogalom segítségével definiált ponthalmazok</p>	<p>Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát.</p> <p>Ismerje a térelemeket és a szög fogalmát.</p> <p>Ismerje a szögek nagyság szerinti osztályozását és a nevezetes szögpárokat.</p> <p>Tudja a térelemek távolságára és szögére (pont és egyenes, pont és sík, párhuzamos egyenesek, párhuzamos síkok távolsága; két egyenes, egyenes és sík, két sík hajlásszöge) vonatkozó meghatározásokat.</p> <p>Ismerje a kör, gömb, szakaszfelező merőleges, szögfelező fogalmát. Használja a fogalmakat feladatmegoldásokban.</p>	<p>Tudja kitérő egyenesek távolságát és hajlásszögét meghatározni.</p> <p>Ismerje a parabola fogalmát.</p>
<p><b>4.2 Geometriai transzformációk</b></p> <p>4.2.1 Egybevágósági transzformációk</p>	<p>Ismerje a síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás) leírását, tulajdonságaikat.</p> <p>Alkalmazza a feladatokban az eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés egybevágósági transzformációkat.</p> <p>Tudjon végrehajtani transzformációkat konkrét esetekben.</p> <p>Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek egybevágósági alapeseteit.</p> <p>Ismerje fel és használja feladatokban a különböző alakzatok szimmetriáit.</p>	<p>Ismerje a geometriai transzformációk és a függvények kapcsolatát.</p> <p>Tudja pontosan megfogalmazni az egybevágósági transzformációk definícióit, a síkidomok egybevágóságának fogalmát, valamint a sokszögek egybevágóságának feltételét.</p> <p>Tudja alkalmazni a pont körüli forgatást.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a térbeli egybevágósági transzformációkat.</p>

<p>4.2.2 Hasonlósági transzformációk</p> <p>4.2.3 Egyéb transzformációk Merőleges vetítés</p>	<p>Ismerje a középpontos hasonlósági transzformáció leírását, tulajdonságait. Alkalmazza a középpontos nagyítást, kicsinyítést egyszerű, gyakorlati feladatokban. Tudjon szakaszt adott arányban felosztani. Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek hasonlósági alapeseteit. Ismerje fel a hasonló alakzatokat, tudja felírni a hasonlóság arányát. Ismerje és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról és a hasonló testek felszínének és térfogatának arányáról szóló tételeket.</p>	<p>Ismerje a hasonlósági transzformáció definícióját.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a párhuzamos szelők tételét, a tétel megfordítását és a párhuzamos szelőszakaszok tételét. Bizonyítsa és alkalmazza a belső szögfelező tételt.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a merőleges vetítést.</p>
<p><b>4.3 Síkbeli és térbeli alakzatok</b></p> <p>4.3.1 Síkbeli alakzatok Háromszögek</p> <p>Négyszögek</p> <p>Sokszögek</p>	<p>Ismerje a síkidomok, testek csoportosítását különböző szempontok szerint.</p> <p>Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint. Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van). Ismerje és alkalmazza speciális háromszögek tulajdonságait. Ismerje és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó definíciókat, tételeket (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör).</p> <p>Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását. Ismerje és alkalmazza a magasság- és a befogótételt.</p> <p>Ismerje a négyszögek fajtáit (trapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) és tulajdonságaikat, ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban. Ismerje a konvex négyszög belső és külső szögeinek összegére vonatkozó tételeket, alkalmazza ezeket egyszerű feladatokban.</p> <p>Ismerje és alkalmazza konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételeket. Ismerje a szabályos sokszögek definícióját.</p>	<p>Bizonyítsa a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételeket (körülrírt és beírt kör középpontja, magasságpont, súlypont, középvonal tulajdonságai).</p> <p>Bizonyítsa a Pitagorasz-tételt és megfordítását. Bizonyítsa a magasság- és a befogótételt.</p> <p>Bizonyítsa a húrnégyszögek és az érintőnégyzetek tételét, ismerje a tételek megfordítását. Ismereteit alkalmazza feladatok megoldásában.</p> <p>Bizonyítsa a konvex sokszög átlóinak számára, valamint a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételeket.</p>

<p>Kör</p> <p>4.3.2 Térbeli alakzatok</p>	<p>Ismerje a kör részeit, ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban. Tudja és használja, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Tudjon szöget mérni fokban és radiánban. Tudja és alkalmazza feladatokban, hogy a középponti szög arányos a körívvel és a hozzá tartozó körcikk területével.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a Thalész-tételt és megfordítását.</p> <p>Ismerje a következő testeket és azok részeit, alkotóelemeit: hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp. Ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban.</p>	<p>Bizonyítsa, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint hogy a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.</p> <p>Bizonyítsa és alkalmazza feladatokban a kerületi és középponti szögek tételét és a kerületi szögek tételét. Ismerje és használja a látókör fogalmát. Bizonyítsa a Thalész-tételt és megfordítását. Ismerje és alkalmazza a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét.</p>
<p><b>4.4 Vektorok síkban és térben</b></p>	<p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vektor fogalma, abszolútértéke,</li> <li>- nullvektor, ellentett vektor,</li> <li>- vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa,</li> <li>- vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok,</li> <li>- vektor felbontása összetevőkre.</li> </ul> <p>Ismerje a skaláris szorzat definícióját, tulajdonságait. Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vektor koordinátái,</li> <li>- a vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái,</li> <li>- vektorok összegének, különbségének, skalárral való szorzatának koordinátái,</li> <li>- skalárszorzat kiszámítása vektorok koordinátaiból.</li> </ul>	<p>Tudja koordinátaikkal adott vektorok hajlásszögét meghatározni. Ismerje az egyértelmű vektorfelbontás tételét.</p> <p>Bizonyítsa a skalárszorzat koordinátaiból való kiszámítására vonatkozó tételt.</p>
<p><b>4.5 Trigonometria</b></p>	<p>Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalárányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban. Tudja a szögfüggvények általános definícióját. Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, <math>\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1</math>, <math display="block">\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math></p>	

	<p>Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek (<math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math>) szögfüggvényeit.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a szinusz- és a koszinusztételt.</p>	<p>Függvénytáblázat segítségével tudja alkalmazni egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket (<math>\sin(\alpha \pm \beta)</math>, <math>\cos(\alpha \pm \beta)</math>, <math>\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)</math>, <math>\sin 2\alpha</math>, <math>\cos 2\alpha</math>, <math>\operatorname{tg} 2\alpha</math>).</p> <p>Bizonyítsa a szinusz- és a koszinusztételt.</p>
<p><b>4.6 Koordinátageometria</b></p> <p>4.6.1 Pontok, vektorok</p> <p>4.6.2 Egyenes</p> <p>4.6.3 Kör</p> <p>4.6.4 Parabola</p>	<p>Tudja kiszámítani <math>\overline{AB}</math> vektor koordinátáit, abszolútértékét.</p> <p>Tudja kiszámítani két pont távolságát.</p> <p>Tudja kiszámítani szakasz felezőpontjának, harmadoló pontjainak koordinátáit, alkalmazza ezeket feladatokban.</p> <p>Tudja felírni a háromszög súlypontjának koordinátáit, alkalmazza ezt feladatokban.</p> <p>Tudja felírni különböző adatokkal meghatározott egyenesek egyenletét.</p> <p>Tudja kiszámítani egyenesek metszéspontjának koordinátáit.</p> <p>Ismerje az egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit.</p> <p>Tudjon megoldani egyszerű geometriai feladatokat koordinátageometriai eszközökkel.</p> <p>Tudja felírni adott középpontú és sugarú kör egyenletét.</p> <p>Tudja meghatározni kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát.</p> <p>Tudja meghatározni kör és egyenes metszéspontját.</p> <p>Tudja felírni a kör adott pontjában húzott érintő egyenletét.</p>	<p>Igazolja a szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggéseket.</p> <p>Tudja kiszámítani szakasz <math>n:m</math> arányú osztópontjának koordinátáit.</p> <p>Igazolja a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést.</p> <p>Tudja levezetni az egyenes egyenletét a síkban különböző kiindulási adatokból.</p> <p>Tudja síkbeli egyenesek hajlásszögét meghatározni.</p> <p>Tudja levezetni a kör egyenletét.</p> <p>Ismerje a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatát.</p> <p>Tudja meghatározni két kör kölcsönös helyzetét, metszéspontjait.</p> <p>Tudja felírni külső pontból húzott érintő egyenletét.</p> <p>Tudja levezetni a parabola <math>x^2 = 2py</math> alakú egyenletét.</p> <p>Tudjon feladatokat megoldani a koordinátengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal.</p>
<p><b>4.7 Kerület, terület</b></p>	<p>Ismerje a kerület és a terület szemléletes fogalmát.</p> <p>Tudja kiszámítani a háromszög területét különböző adatokból:</p> $t = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$ <p>Tudja kiszámítani nevezetes négyszögek, szabályos sokszögek, továbbá kör, körcikk, körszelet kerületét és területét.</p>	<p>Bizonyítsa a háromszög területének kiszámítására használt képleteket, továbbá ismerje és alkalmazza az alábbi összefüggéseket:</p> $t = sr \text{ (bizonyítással),}$ $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$ <p>Bizonyítsa nevezetes négyszögek és szabályos sokszögek területképleteit.</p>
<p><b>4.8 Felszín, térfogat</b></p>	<p>Ismerje a felszín és a térfogat szemléletes fogalmát.</p> <p>Tudja kiszámítani hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla és csonkakúp felszínét és térfogatát egyszerű esetekben.</p>	<p>Bizonyítsa a csonkagúla és a csonkakúp térfogatképletét.</p>

## 5. Valószínűség-számítás, statisztika

A modern tudományelmélet egyik fontos pillére az a gondolkodásmód, amellyel a sztochasztikus jelenségek leírhatók. A társadalomtudományi, a természettudományi és a közgazdasági törvényeink nagy része csak statisztikusan igaz. A mindennapi élet történéseit sem lehet megérteni statisztikai ismeretek nélkül, mivel ott is egyre gyakrabban olyan tömegjelenségekkel kerülünk szembe, amelyek a statisztika eszközeivel kezelhetők. A sztochasztika gondolkodásmódja a XXI. század elejére az emberi gondolkodásnak, döntéseknek és cselekvéseknek olyannyira alapvető része lesz, hogy elsajátítása semmiképpen sem kerülhető meg. Ebben a témakörben középszinten csak az alapfogalmak megértését és használatát követeljük meg, míg emelt szinten a téma matematikai felépítésének egyes részéről is számot kell adni.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p><b>5.1 Leíró statisztika</b></p> <p>5.1.1 Statisztikai adatok gyűjtése, rendszerezése, különböző ábrázolásai</p> <p>5.1.2 Nagy adathalmazok jellemzői, statisztikai mutatók</p>	<p>Tudjon adott adathalmazt szemléltetni.</p> <p>Tudjon adathalmazt táblázatba rendezni és táblázattal megadott adatokat feldolgozni.</p> <p>Értse a véletlenszerű mintavétel fogalmát.</p> <p>Tudjon kördiagramot és oszlopdiagramot készíteni.</p> <p>Tudjon adott diagramról információt kiolvasni.</p> <p>Tudja és alkalmazza a következő fogalmakat: osztályba sorolás, gyakorisági diagram, relatív gyakoriság.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: átlag, súlyozott számtani közép, medián, módusz, terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás.</p> <p>Tudja kiszámítani ismert átlagú adathalmazok egyesítésének átlagát.</p> <p>Tudja a szórást kiszámolni adott adathalmaz esetén a definíció alkalmazásával vagy számológéppel.</p> <p>Tudjon adathalmazokat összehasonlítani a tanult statisztikai mutatók segítségével.</p>	
<p><b>5.2 A valószínűség-számítás elemei</b></p>	<p>Alkalmazza az esemény és az eseménytér fogalmát konkrét példák esetén.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a klasszikus (Laplace)-modellt. Tudja meghatározni esemény komplementerének a valószínűségét.</p> <p>Ismerje a szemléletes kapcsolatot a relatív gyakoriság és a valószínűség között.</p> <p>Tudjon valószínűséget számítani visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a binomiális eloszlás képletét.</p>	<p>Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: események egyesítésének, metszetének és komplementerének valószínűsége, feltételes valószínűség, függetlenség, függőség.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a geometriai valószínűség modelljét.</p> <p>Tudja értelmezni a binomiális eloszlást (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlást (visszatevés nélküli modell). Tudjon ezek alkalmazásával konkrét valószínűségeket kiszámítani.</p> <p>Ismerje és tudja kiszámítani a várható értéket a diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.</p>